Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Analyse II

Année 2018-2019
Enseignant : Y. Abouelhanoune

Table des matières

Suites et Séries de Fonctions

Première partie
Suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction d'un ensemble Δ non vide vers un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad f_n : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f_n(x) \end{array}$$

1 Convergence simple, convergence uniforme des suites de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition

On dira que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur Δ s'il existe $f \in \mathcal{F}(\Delta,\, \mathbb{K})$ (appelée limite simple de la suite (f_n)) telle que :

$$\forall\, x \in \Delta; \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

qui s'écrit aussi :

$$(\forall x \in \Delta)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N);\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Exemples

1. Soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2} \end{array} \quad n \in \mathbb{N}$

   Pour $x \neq 0\,;\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

   Pour $x = 0\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

   La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

   $$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit la suite de fonctions $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = nxe^{-nx^2} + x \end{array}$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} + x = x.$

   Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x$.

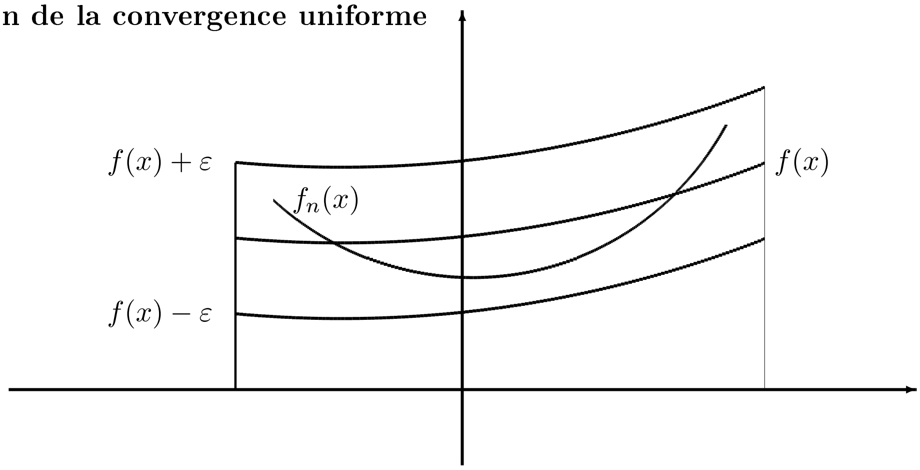
1.2 Convergence uniforme

Définition

On dira que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur Δ s'il existe $f \in \mathcal{F}(\Delta,\ \mathbb{K})$ (appelée limite uniforme de la suite (f_n)) telle que :

$$(\forall\, \varepsilon > 0);\ (\exists\, N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N)\ (\forall\, x \in \Delta);\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Illustration de la convergence uniforme



Remarques importantes

1. A la différence de la convergence simple, remarquons que dans la convergence uniforme, le rang de convergence N est indépendant des $x \in \mathbb{R}$. La convergence uniforme entraîne donc la convergence simple (la réciproque est fausse).
2. La convergence uniforme de (f_n) vers f peut s'écrire aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in\Delta} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Critère de Cauchy de convergence uniforme

Comme $\mathbb{K}$ est complet on a alors :

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur Δ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall x \in \Delta;\ \forall n \geq N;\ \forall p \in \mathbb{N}^*;\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Exemples

Reprenons la suite $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$.

1. Nous avons vu que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   On a de plus la convergence uniforme de (f_n) sur tout l'intervalle $[\omega,\ +\infty[$. En effet :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^2}{1+nx^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in [\omega,\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + n\omega^2} = 0$$

2. A-t-on convergence uniforme sur $[0,\ \omega[$?

$$\sup_{x \in [0,\ \omega[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0,\ \omega[} \frac{1}{1 + nx^2} = 1 \neq 0 \qquad \textbf{sup} \text{ atteind par limite en } 0.$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,\ \omega[$.

2 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

Les théorèmes que nous allons établir donnent une réponse au problème suivant :

Problème

Etant donné une suite de fonctions (f_n) dont on connaît les propriétés : (f_n) continue, intégrable ou dérivable, pour tout n, peut-on affirmer que la fonction limite f de (f_n) est elle même continue, intégrable ou dérivable ?

2.1 Continuité

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur Δ telle que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur Δ.
2. La suite (f_n) converge uniformément sur Δ vers f.

Alors

f est aussi continue sur Δ.

Remarque

Ce théorème se traduit en disant que "la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue".

Preuve

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Alors :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N;\ \forall x \in [a, b];\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Considérons la fonction $f_N : x \longmapsto f_N(x)$. On a f_N est continue sur $[a, b]$. Donc : $\forall x_0 \in [a, b]$ fixé on a :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0;\ \exists \eta > 0;\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Pour montrer la continuité de f, il faut montrer que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$). On a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

Or d'après (1) on a : $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
D'après (2) on a : $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Par conséquent on a :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \eta > 0;\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Donc f est continue en tout point x_0 de $[a, b]$. f est donc continue sur $[a, b]$.

Remarque (Importante)

• Attention, la convergence simple de la suite (f_n) vers f n'implique pas nécessairement que f est continue. Par exemple, prenons l'intervalle $[0, 1]$ et $\begin{array}{llll} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x) = x^n \end{array}$. On a :

$$\forall x \in [0, 1[;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

$x = 1$; $f_n(1) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$.
Donc (f_n) converge simplement dans $[0, 1]$ vers la fonction : $f : x \longmapsto f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array} \right.$.
On voit bien que f n'est pas continue dans $[0, 1]$ (elle n'est pas continue en 1).
D'ailleur, la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme ; en effet :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = 1$$

ne tend pas vers 0.

2.2 Intégration

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ telle que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n$ est intégrable sur $[a, b]$.
2. La suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f.

Alors

1. f est intégrable sur $[a, b]$.
2. $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$
3. La suite $g_n(x) = \int_a^b f_n(t)\, dt$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $\int_a^x f(t)\, dt$.

Remarque

Ce théorème montre qu'on peut échanger l'intégration et le passage à la limite, lorsque la suite de fonctions intégrables (f_n) convergent uniformément vers f.

Preuve

On va montrer 3., les propriétés 1. et 2. sont laissées en exercice.
comme la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [a, b],\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}$$

Comme $|f_n(x) - f(x)|$ et $\frac{\varepsilon}{(b-a)}$ sont positifs, alors :

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon$$

Or on a :

$$\left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dx \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt$$

$$\text{Donc} \quad \forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall x \in [a,b];\ \left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| < \varepsilon$$

Donc la suite de fonctions $g_n(x) = \int_a^b f_n(x)dx$ converge uniformément vers $g(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Exemple

Soit $I = [0, \pi]$ et (f_n) la suite de fonctions définie sur I par :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ f_n(x) = \sin^n(x)(1 - \sin^n(x))$$

• Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N};\ f_n$ est continue sur $[0, \pi]$ donc intégrable.

• Convergence uniforme

$\forall x \in [0, \pi]$ on a :

Si $x \neq \frac{\pi}{2}$: Comme $0 \leq \sin x < 1$ donc $0 \leq \sin^n x < 1$.

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin^n(x) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Si $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f_n(\frac{\pi}{2}) = \sin^n(\frac{\pi}{2})(1 - \sin^n(\frac{\pi}{2})) = 0$$

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle : $\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 0 \end{array}$

De plus, si l'on pose $u = \sin x$, on a :

$$\sup_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,\pi]} \sin^n(x)(1 - \sin^n(x))$$

$$\text{On a} \quad \sup_{x \in [0,\pi]} u(1-u) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc} \quad \sup_{x \in [0,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'où la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle $f(x) = 0$. En appliquant le théorème précédent :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \sin^n(x)(1 - \sin^n(x))dx = \int_0^\pi \lim_{n \to +\infty} \sin^n(x)(1 - \sin^n(x))dx = \int_0^\pi 0dx = 0$$

2.3 Dérivation

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions sur $[a,b]$ telle que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ f_n$ est de classe C^1 sur $[a,b]$.
2. $\exists\, x_0 \in [a,b]$ / la suite $(f_n(x_0))$ converge ($\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$).
3. La suite (f'_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

Alors

1. La suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$
2. f est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a : $f' = g$

Remarque $(f' = g)$

Ce résultat s'écrit aussi :
$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$$
c.a.d qu'on peut échanger la dérivation et le passage à la limite.

Preuve

On a la suite (f'_n) de fonctions converge uniformément vers g. De plus comme (f'_n) est intégrable car f_n est de classe C^1, d'après le théorème d'intégration, la suite de fonctions $\int_{x_0}^{x} f'_n(x)dt$ converge uniformément vers $\int_{x_0}^{x} g(x)dx$.
Or on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$. On montre que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers $l + \int_{x_0}^{x} g(x)dx$.
En effet : $\forall x \in [a,b]\,$;
$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \left(l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt + f_n(x_0) - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right| \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + \left|\int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right|\end{aligned}$$
Lorsque $n \to +\infty$, les deux modules du second membre tendent chacune vers 0. Donc le premier membre tend aussi vers 0. La suite (f_n) converge donc uniformément vers $f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.
Il est clair aussi que f est dérivable sur $[a,b]$ et on a : $f'(x) = g(x) \forall x \in [a,b]$.

Deuxième partie
Séries de fonctions

1 Définition

Soit $U_n(x)$ une suite de fonctions définies d'un ensemble Δ vers un corps $\mathbb{K}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & U_n(x) \end{array}$. A partir de cette suite de fonctions, on peut définir une nouvelle suite de fonctions $(S_n(x))$ par :

$$\begin{array}{rcl} S_0(x) & = & U_0(x) \\ S_1(x) & = & U_0(x) + U_1(x) \\ \vdots & & \\ S_n(x) & = & U_0(x) + \cdots + U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) \end{array}$$

On apelle série de fonctions la suite de fonctions $(S_n(x))$.
On note en général la série par $\sum U_n(x)$.
$U_n(x)$ est le terme général de la série.
$S_n(x)$ est la suite des sommes partielles.

2 Convergence simple, convergence uniforme de séries de fonctions

Définition 1

On dit que la série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge simplement sur Δ si la suite des sommes partielles $(S_n(x))$ converge simplment sur Δ. Si on appelle $S(x)$ la limite simple de $S_n(x)$, alors on a :

$$\forall x \in \Delta;\ \forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N; \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$ est appelée somme de la série $\sum U_n(x)$

Définition 2

On dit que la série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur Δ si la suite des sommes partielles $(S_n(x))$ converge uniformément sur Δ. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N;\ \forall x \in \Delta; \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

La convergence uniforme sur Δ s'écrit aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \Delta} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

2.1 Critère de Cauchy de convergence uniforme dans un espace complet

La série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur Δ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N;\ \forall p \in \mathbb{N}^*;\ \forall x \in \Delta; \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right| < \varepsilon$$

Exemple

Considérons la série de fonctions $\sum U_n(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad U_n(x) = \frac{x}{(1+|x|)^n}$$

• Convergence simple de $\sum U_n(x)$ sur $\mathbb{R}$:
La suite des sommes partielles :

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+|x|)^k} \\
S_n(x) &= x + \frac{x}{1+|x|} + \frac{x}{(1+|x|)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+|x|)^n} \\
&= x\left[1 + \frac{1}{1+|x|} + \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}; \quad U_n(0) = 0$. Donc $S_n(0) = 0$. c.a.d $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$.

Si $x \neq 0$,

$$S_n(x) = x\left[\frac{1 - (\frac{1}{1+|x|})^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+|x|}}\right]$$

Or $0 < \frac{1}{1+|x|} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1} = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x}{1 - \frac{1}{1+|x|}} = \frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

La série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sa somme $S(x)$ définie par :

$$\begin{array}{rrcl}
S: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{x(1+|x|)}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}
\end{array}$$

• Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} \left| x\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+|x|}}\right) - \frac{x}{1 - \frac{1}{1+|x|}} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} \left| \frac{-x\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+|x|}} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^n = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum U_n(x)$, par contre on peut montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[; \ a > 0$.

2.2 Convergence normale

> On dit qu'une série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge normalement sur Δ s'il existe une série numérique $\sum V_n$ convergente telle que l'on ait :
>
> $$\forall x \in \Delta; \quad |U_n(x)| \leq V_n$$

Exemples

1. $\Delta = [0,1]$; $\quad U_n(x) = \frac{x}{(n+1)^2}$. On a :

$$\forall x \in \Delta; \quad |U_n(x)| = \left|\frac{x}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

   Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum U_n(x)$ converge normalement sur Δ.

2. $\Delta = \mathbb{R}$; $\quad U_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

$$\forall x \in \Delta; \quad \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

   Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum U_n(x)$ converge normalement $\mathbb{R}$.

3. $\Delta = \mathbb{R}_+$; $\quad U_n(x) = x^n e^{-nx}$. Calculons $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |U_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} x^n e^{-nx}$.

   Etudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonctions $f(x) = x^n e^{-nx}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $\quad f'(x) = nx^{n-1}e^{-nx} - ne^{-nx}x^n = x^{n-1}ne^{-nx}(1-x)$

   $f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-n}	$\searrow$	0

   $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |U_n(x)| = e^{-n} = V_n$. Or $\sum e^{-n}$ converge car $\sqrt[n]{e^{-n}} = e^{-1} < 1$ (critère de Cauchy).

   D'où $\sum U_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2.3 Condition suffisante de convergence uniforme

Théorème (important)

$\boxed{\text{Si } \sum U_n(x) \text{ converge normalement sur } \Delta \text{ alors elle converge uniformément sur } \Delta.}$

Preuve

$\sum U_n(x)$ converge normalement sur $\Delta \iff \forall x \in \Delta; \quad |U_n(x)| \leq V_n$ avec $\sum V_n$ série numérique convergente.

Utilisons le critère de Cauchy de convergence uniforme dans un espace complet :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\right| &= |U_{n+1}(x) + \cdots + U_{n+p}(x)| \\
&\leq |U_{n+1}| + \cdots + |U_{n+p}(x)| \\
&\leq V_{n+1} + V_{n+2} + \cdots + V_{n+p}
\end{aligned}$$

Comme $\sum U_n$ converge, alors elle vérifie le critère de Cauchy dans un espace complet. C'est à dire $\left|\sum_{n+1}^{n+p} V_k\right| < \varepsilon$. D'où $\left|\sum_{n+1}^{n+p} U_k(x)\right| < \varepsilon$.

Exemple

$$U_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3 + x^2} \qquad \Delta = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad |U_n(x)| \leq \frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3}$$

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc la série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3 Théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions

3.1 Théorème de continuité

Soit $\sum U_n(x)$ une série de fonctions définies sur Δ et telle que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n(x)$ est continue sur Δ.
2. $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur Δ vers sa somme $S(x)$.

Alors

$S(x)$ est aussi continue sur Δ.

Preuve

$\sum U_n(x)$ converge uniformément sur Δ vers $S(x) \iff$ la suite de fonctions $(S_n(x))$ converge uniformément sur Δ vers $S(x)$.

De plus, comme $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n(x)$ est continue sur Δ, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n(x)$ est aussi continue sur Δ.

D'après le théorème de continuité des suites de fonctions, $S(x)$ est continue sur Δ.

Remarque

Le théorème de continuité a comme résultat :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} U_n(x) \right)$$

3.2 Théorème d'intégration

Soit $\sum U_n(x)$ une série de fonctions définies sur $[a, b]$ et vérifiant :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n(x)$ est intégrable sur $[a, b]$.
2. $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers sa somme $S(x)$.

Alors

1. $S(x)$ est aussi intégrable sur $[a, b]$.
2. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b U_n(t)\, dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t) \right) dt = \int_a^b S(t)\, dt$$
3. La série de fonctions $\sum V_n(x)$ avec $V_n(x) = \displaystyle\int_a^x U_n(t)\, dt$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $\displaystyle\int_a^x S(t)\, dt$.

Preuve

Résulte facilement du théorème d'intégration de suites de fonctions.

3.3 Théorème de dérivation

Soit $\sum U_n(x)$ une série de fonctions définies sur Δ et telles que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n(x) \in C^1(\Delta)$.
2. $\exists\, x_0 \in \Delta$ tel que la série numérique $\sum U_n(x_0)$ converge.
3. La série de fonctions $\sum U'_n(x)$ converge uniformément sur Δ.

Alors :

1. La série de fonctions $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur Δ.
2. Sa somme $S(x)$ est de classe C^1 sur Δ et on a :

$$\forall\, x \in \Delta\,, \quad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} U'_n(x)$$

Preuve

Utiliser le théorème de dérivation des suites de fonctions.

Variante du théorème de dérivation

Soit $\sum U_n(x)$ une série de fonctions définies sur Δ et telles que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n(x) \in C^1(\Delta)$.
2. $\exists\, x_0 \in \Delta$ tel que la série numérique $\sum U_n(x_0)$ converge.
3. La série $\sum U'_n(x)$ converge uniformément sur tout ségment $[c, d]$ de Δ.

Alors :

1. $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur tout ségment $[c, d]$ de Δ.
2. $S(x)$ est de classe C^1 sur Δ et on a :

$$\forall\, x \in \Delta\,, \quad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} U'_n(x)$$

$\square$